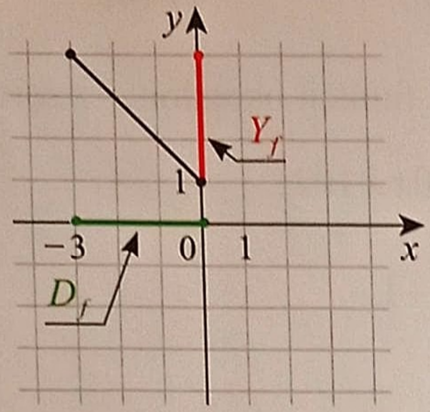
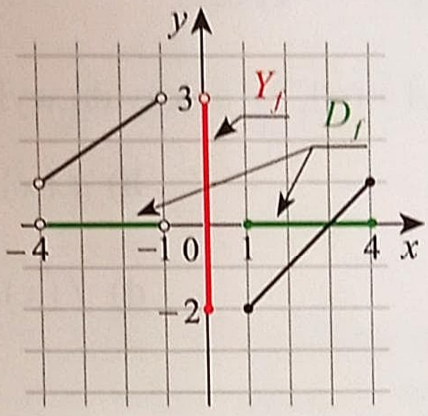
Przykład 9. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f (kolor czarny). Podaj dziedzinę D_f i zbiór wartości Y_f funkcji f.

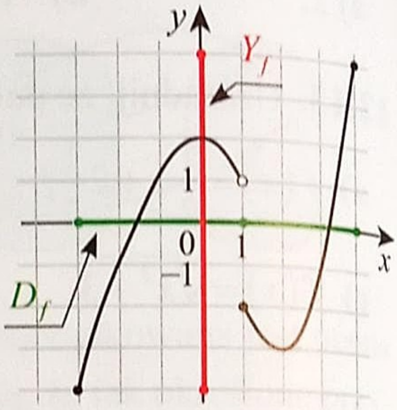
a)



b)



c)



Rozwiązanie

- Rzut prostokątny wykresu danej funkcji na oś x jest obrazem graficznym dziedziny funkcji (kolor zielony).
- Rzut prostokątny wykresu danej funkcji na oś y jest obrazem graficznym zbioru wartości Y_f tej funkcji (kolor czerwony)

Odp.: **a)** $D_f = \langle -3; 0 \rangle$, *inne zapisy:* $x \in \langle -3; 0 \rangle$ albo $-3 \le x \le 0$,

$Y_f = \langle 1; 4 \rangle$, *inne zapisy:* $y \in \langle 1; 4 \rangle$ albo $1 \le y \le 4$,

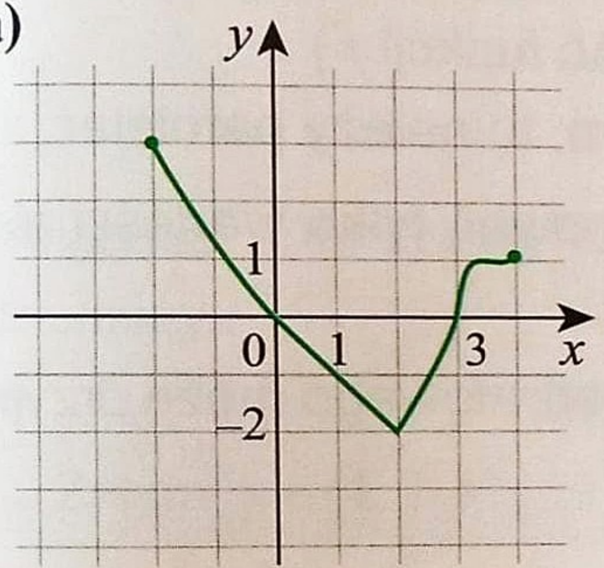
b) $D_f : x \in (-4; -1)$ lub $x \in \langle 1; 4 \rangle$, *inne zapisy:* $-4 < x < -1$ albo $1 \le x \le 4$,

$Y_f = \langle -2; 3)$, *inne zapisy:* $y \in \langle -2; 3)$ albo $-2 \le y < 3$,

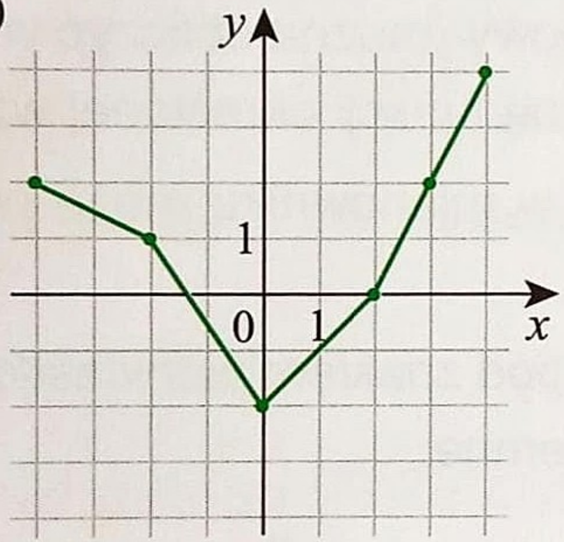
c) $D_f : x \in \langle -3; 4 \rangle$, $Y_f = \langle -4; 4 \rangle$.

Ćwiczenie 7. Podaj dziedzinę D_f oraz zbiór wartości Y_f funkcji f przedstawionej na poniższym rysunku.

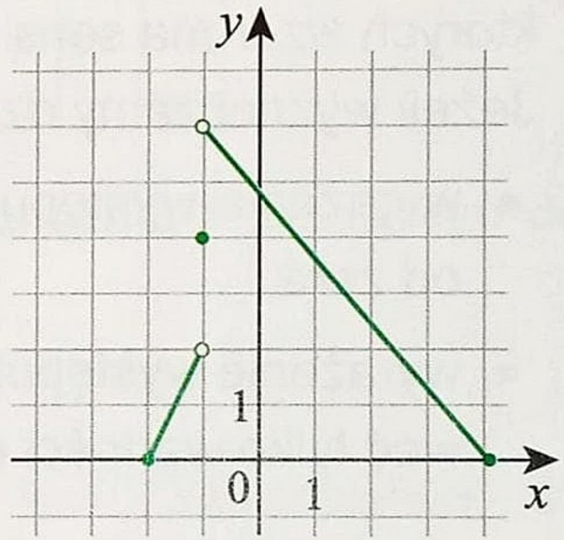
a)



b)



c)



Jeżeli funkcja określona jest opisem słownym, to jej dziedzinę odczytujemy z tego zapisu i na tej podstawie określamy zbiór wartości. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 11. Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=x+3$, **b)** $f(x)=\frac{1}{x+3}$, **c)** $f(x)=\sqrt{1-x}$, **d)** $f(x)=\frac{3}{\sqrt{4+x}}$.

Rozwiązanie

a) Wyrażenie $x+3$ ma sens liczbowy dla każdej liczby rzeczywistej x (do każdej liczby rzeczywistej x można dodać 3). Zatem x jest dowolną liczbą rzeczywistą, czyli $x \in \boldsymbol{R}$.

b) Wyrażenie $\frac{1}{x+3}$ ma sens liczbowy, gdy mianownik $x+3$ nie jest równy 0 (dzielenie przez 0 to działanie niewykonalne). Zatem $x+3 \neq 0$, czyli $x \neq -3$.

c) Wyrażenie $\sqrt{1-x}$ ma sens liczbowy, gdy wyrażenie $1-x$ występujące pod znakiem pierwiastka ma wartości nieujemne (pierwiastek parzystego stopnia istnieje tylko z liczb nieujemnych). Zatem $1-x \geq 0$, czyli $x \leq 1$.

d) Wyrażenie $\frac{3}{\sqrt{4+x}}$ ma sens liczbowy, gdy mianownik $\sqrt{4+x}$ nie jest równy 0 i wyrażenie $4+x$ występujące pod znakiem pierwiastka ma wartość nieujemną. Zatem $4+x>0$, czyli $x>-4$.

Odp.: **a)** $D_f=\boldsymbol{R}$ *inny zapis:* $D_f: x \in \boldsymbol{R}$, **b)** $D_f: x \neq -3$ *inny zapis:* $D_f: x<-3$ lub $x>-3$,

c) $D_f=(-\infty; 1\rangle$ *inny zapis:* $D_f: x \leq 1$, **d)** $D_f=(-4; +\infty)$ *inny zapis:* $D_f: x>-4$.

Ćwiczenie 9. Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=x^2-2$, **b)** $f(x)=\frac{x}{x-1}$, **c)** $f(x)=\sqrt{x+5}$, **d)** $f(x)=\frac{8}{\sqrt{2-x}}$.

Przykład 13. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=5x-1$. Oblicz wartości funkcji f, dla podanych argumentów x: **a)** -3, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, **b)** a, $-n$, $3k$, m^2, $b+1$.

Rozwiązanie. We wzorze funkcji $f(x)=5x-1$, w miejsce x kolejno podstawiamy:

a) -3, zatem $f(-3)=5\cdot(-3)-1=-16$,

$\sqrt{2}$, zatem $f(\sqrt{2})=5\cdot(\sqrt{2})-1=5\sqrt{2}-1$,

$\frac{1}{\sqrt{5}}$, zatem $f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-1=\sqrt{5}-1$,

b) a, zatem $f(a)=5\cdot(a)-1=5a-1$,

$-n$, zatem $f(-n)=5\cdot(-n)-1=-5n-1$,

$3k$, zatem $f(3k)=5\cdot(3k)-1=15k-1$,

m^2, zatem $f(m^2)=5\cdot(m^2)-1=5m^2-1$,

$b+1$, zatem $f(b+1)=5\cdot(b+1)-1=5b+4$.

Ćwiczenie 11. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=4-3x$. Oblicz wartości funkcji f dla podanych argumentów x: **a)** $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $1\frac{1}{3}$, **b)** m, $k-3$, $\frac{t}{3}$, $1-2p$.

Przykład 14. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=2x+1$. Napisz wzór funkcji g, gdy:

a) $g(x)=f(x+1)$, **b)** $g(x)=f\left(x^2-3x\right)$, **c)** $g(x)=f(f(x))$.

Rozwiązanie

a) Zapis $f(x+1)$ rozumiemy tak, że we wzorze funkcji f w miejsce x podstawiamy $x+1$. Zatem

$$g(x)=2\cdot\overbrace{(x+1)}^{x}+1=2x+3.$$

$$f(x)=2\cdot x+1 \quad \uparrow \quad \underbrace{x+1}$$

b) Zapis $f\left(x^2-3x\right)$ rozumiemy tak, że we wzorze funkcji f w miejsce x podstawiamy x^2-3x. Zatem

$$g(x)=2\cdot\overbrace{\left(x^2-3x\right)}^{x}+1=2x^2-6x+1.$$

$$f(x)=2\cdot x+1 \quad \uparrow \quad \underbrace{x^2-3x}$$

c) Zauważamy, że $f(f(x))=f(2x+1)$. Zatem

$$g(x)=f(2x+1)=2\cdot\overbrace{(2x+1)}^{x}+1=4x+3.$$

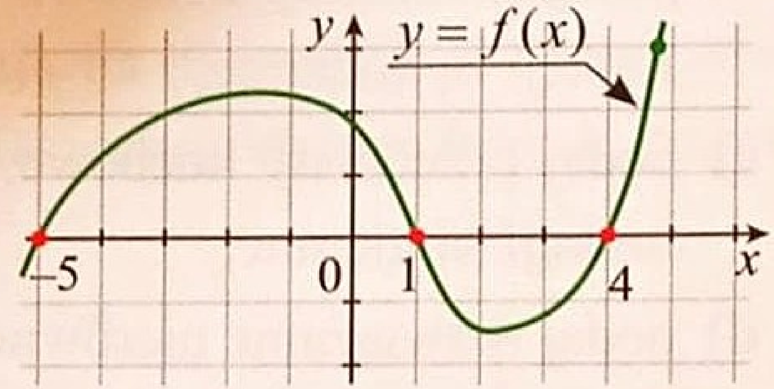
$$f(x)=2\cdot x+1 \quad \uparrow \quad \underbrace{2x+1}$$

Odp.: **a)** $g(x)=2x+3$, **b)** $g(x)=2x^2-6x+1$, **c)** $g(x)=4x+3$.

Ćwiczenie 12. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=4x^2-x$. Napisz wzór funkcji g, gdy: **a)** $g(x)=f(-x)$, **b)** $g(x)=f(x-1)$, **c)** $g(x)=f(2-x)$, **d)** $g(x)=f(2x)$.

Przykład 16. Przeanalizuj wykres funkcji f i podaj wartości funkcji dla argumentów x_1, x_2, x_3, gdy:

$x_1 = -5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4.$



Rozwiązanie. Z wykresu odczytujemy:

$$y_1 = f(-5) = 0,\quad y_2 = f(1) = 0,\quad y_3 = f(4) = 0.$$

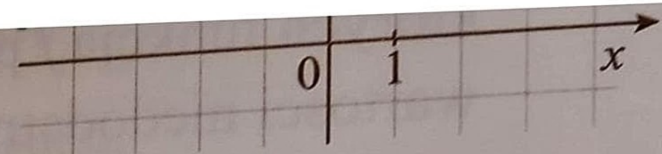
Zauważamy, że wartości funkcji f, gdy $x_1 = -5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, są równe zero.

Wykres funkcji f przecina oś x w punktach o współrzędnych $(-5, 0)$, $(1, 0)$, $(4, 0)$.

Uwaga

- **Miejscem zerowym** funkcji nazywamy każdy argument, dla którego funkcja ma wartość równą zero.
- Liczba x_0 jest miejscem zerowym funkcji f, gdy $f(x_0) = 0$.
- Miejsce zerowe funkcji f jest równe odciętej punktu, w którym wykres funkcji przecina oś odciętych (oś x).

osi x.

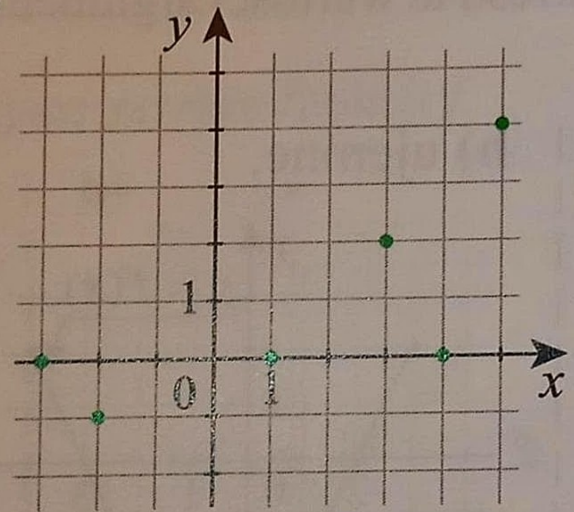


Ćwiczenie 14. Podaj miejsca zerowe funkcji przedstawionej poniżej.

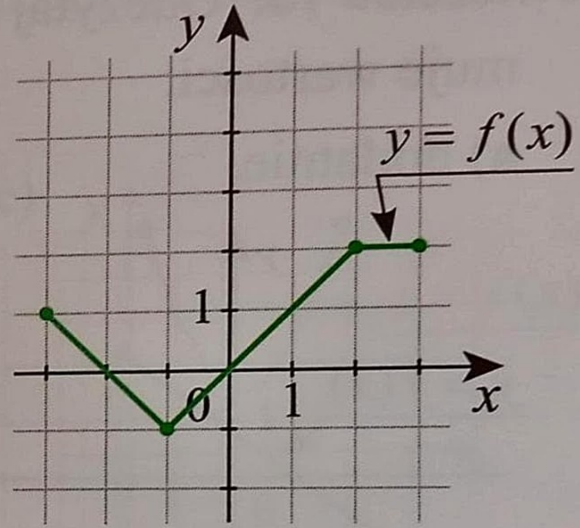
a)

x	y
–3	–1
–1	0
0	3
3	1
4	0
5	2

b)



c)



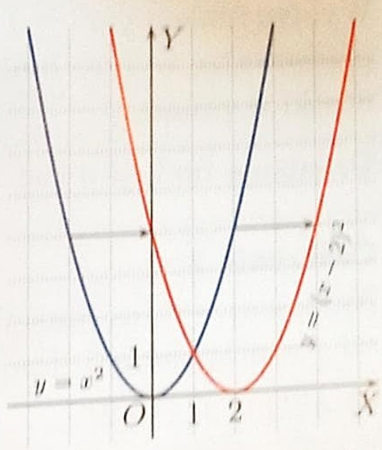
4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

Przykład 1

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x-2)^2$ naszkicowane na podstawie odpowiednich tabeli wartości funkcji.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (x-2)^2$	9	4	1	0	1	4	9

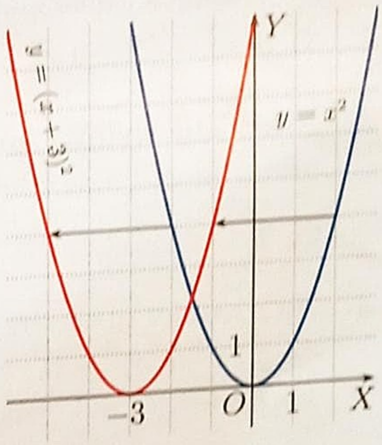


Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x-2)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x+3)^2$ naszkicowane na podstawie odpowiednich tabeli wartości funkcji.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$y = (x+3)^2$	9	4	1	0	1	4	9



Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x+3)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi OX.

TWIERDZENIE

Wykres funkcji $y = f(x-p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w prawo** wzdłuż osi OX.
Wykres funkcji $y = f(x+p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w lewo** wzdłuż osi OX.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji g, stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = |x|$. Podaj miejsce zerowe funkcji g.

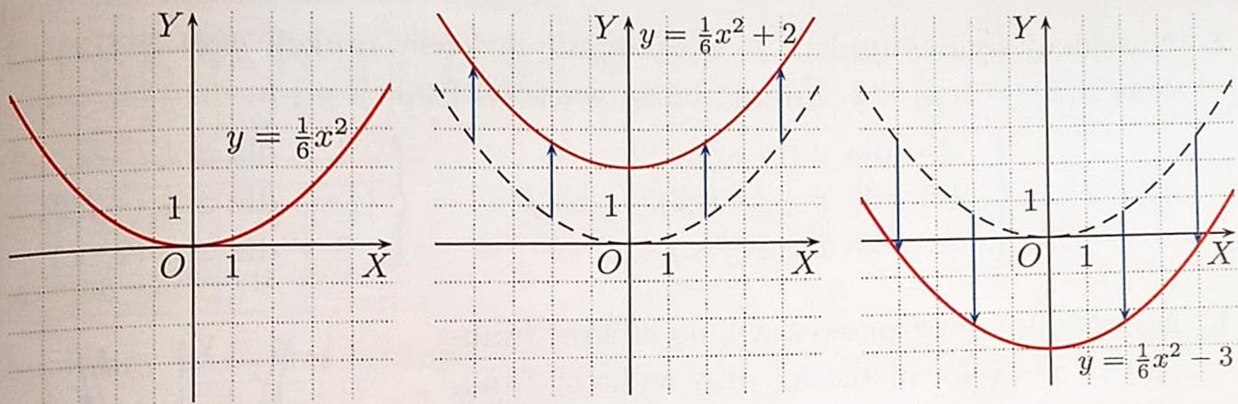
a) $g(x) = |x-1|$ b) $g(x) = |x+2|$ c) $g(x) = |x+3|$ d) $g(x) = |x-4|$

4.6. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY

43

Przykład 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji: $y = \frac{1}{6}x^2$, $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$ oraz $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$.



Wykresy funkcji: $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$ i $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$ można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{6}x^2$ wzdłuż osi OY o odpowiednią liczbę jednostek.

TWIERDZENIE

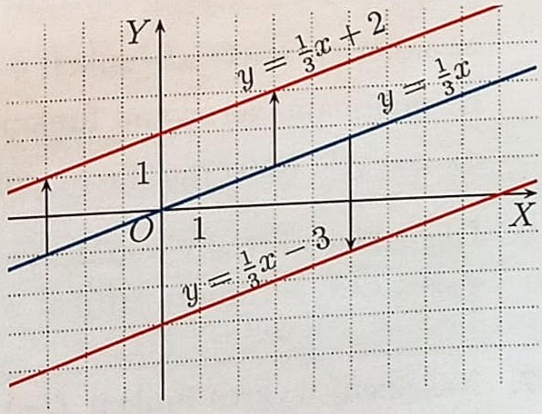
Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w górę** wzdłuż osi OY.

Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w dół** wzdłuż osi OY.

Przykład 2

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 2 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 3 jednostki w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x - 3$.



Ćwiczenie 1

Stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $y = |x|$, naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = |x| + 2$, b) $y = |x| - 2$, c) $y = |x| - 3$, d) $y = |x| + \frac{1}{2}$.